

TACCUINO DI INGEGNERIA · BIOMEDICA · BIOMECCANICA

Biomeccanica delle protesi e del movimento

Il quaderno completo della meccanica del corpo: vettori e momenti, tensioni e cerchio di Mohr, prova di trazione, osso, cinematica e dinamica del cammino, forze sull'anca, stress shielding ed elementi finiti.

Indice

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1 A cosa serve e un po' di storia | 8 La dinamica e le forze sull'anca |
| 2 Gli strumenti: vettori, momenti, equilibrio | 9 Stress shielding e protesi |
| 3 Le tensioni nei materiali | 10 Elementi finiti |
| 4 La prova di trazione e le proprietà dei materiali | 11 Limiti dei modelli e errori tipici |
| 5 L'osso come materiale vivo | 12 Esercizi con soluzione |
| 6 Cinematica del movimento umano | 13 Glossario |
| 7 Schema a blocchi: l'analisi del cammino | 14 Fonti |

1 A cosa serve e un po' di storia

La **biomeccanica** applica le leggi della meccanica ai corpi viventi. Serve a rispondere a domande molto concrete: quanta forza c'è nell'anca quando si sale una scala? Quanto carico porta un osso con una protesi? Perché una protesi si rompe dopo dieci anni e un'altra no? Come si calcola il momento sul ginocchio di un atleta che salta?

Per rispondere servono quattro strumenti, che sono i capitoli di questo taccuino: la **statica** e i **materiali** (che cosa regge e che cosa si rompe), la **cinematica** (come si muove il corpo), la **dinamica** (quali forze lo muovono) e i **modelli numerici** (il metodo degli elementi finiti) che permettono di calcolare ciò che non si può misurare.

La domanda guida è: **perché il corpo, o la protesi, si comporta così?** Un modello è sempre una semplificazione: va costruito con ipotesi dichiarate e confrontato con i dati reali. Un risultato senza la sua incertezza non vale nulla.

Da Borelli agli impianti strumentati

Il primo a trattare il corpo come una macchina fu **Giovanni Alfonso Borelli**, con «De motu animalium» (1680): ossa come leve, muscoli come forze. Nel 1892 **Julius Wolff** descrisse la **legge di trasformazione dell'osso**: la struttura interna dell'osso si adatta ai carichi. Alla fine dell'Ottocento le fotografie in sequenza di **Muybridge** e di **Marey** aprirono lo studio scientifico del movimento; a quel tempo **Braune e Fischer** calcolarono per la prima volta le posizioni dei segmenti del corpo e le forze nel cammino.

Nel Novecento arrivarono le **pedane di forza** (anni '30-'60), la **cinematografia** con marcatori e poi i sistemi a infrarossi, i primi calcoli con il **metodo degli elementi finiti** sull'osso (primi anni '70) e, dagli anni 2000, le **protesi strumentate** che misurano la forza direttamente nel paziente e hanno finalmente confermato i modelli: sono la base dei dati pubblici di OrthoLoad.

Tabella. Tappe principali (date indicative)

Anno	Persona o strumento	Che cosa ha cambiato
1680	Borelli	ossa e muscoli come macchine
1892	Wolff	l'osso si adatta al carico
1878-1890	Muybridge, Marey, Braune e Fischer	il movimento si fotografa e si calcola
anni '30-'60	pedane di forza	si misurano le forze a terra
primi anni '70	elementi finiti sull'osso	calcolo delle tensioni in geometrie complesse
2001-2016	protesi d'anca strumentate	forze misurate dentro il corpo

Che cosa troverai qui. Gli strumenti matematici di base, tensioni e deformazioni, la prova di trazione, le proprietà dell'osso, la cinematica del cammino, uno schema a blocchi dell'analisi del movimento, la dinamica e le forze sull'anca, lo stress shielding, gli elementi finiti, formule con esempi svolti, i limiti dei modelli, esercizi, glossario e fonti.

2 Gli strumenti: vettori, momenti, equilibrio

Una **forza** è un vettore: ha modulo, direzione e verso. Le forze si sommano come vettori, componente per componente. Il **prodotto scalare** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos \theta$ dà un numero (serve a proiettare una forza lungo una direzione); il **prodotto vettoriale** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dà un altro vettore perpendicolare ai due, di modulo $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta$, con verso dato dalla regola della mano destra.

Il **momento** di una forza rispetto a un punto è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$: misura la tendenza a far ruotare. Nel corpo ogni articolazione è un punto attorno al quale i muscoli e il peso producono momenti opposti: un muscolo ha un braccio di leva piccolo (qualche centimetro) e quindi deve fare una forza molto grande per equilibrare un peso con un braccio grande.

L'**equilibrio statico** chiede che la somma delle forze sia zero e che la somma dei momenti sia zero. Con queste due condizioni si calcola, ad esempio, la forza di un muscolo e la reazione in un'articolazione. Nel piano le equazioni sono tre (due forze, un momento), nello spazio sei.

Quando si lavora con più segmenti e punti, le posizioni si scrivono come **matrici e vettori**. Una **matrice di rotazione** $\mathbf{R}$ (ortogonale, con determinante 1) trasforma le componenti di un vettore da un sistema di riferimento all'altro. Una trasformazione completa è una rotazione più una traslazione; si può riunire in una matrice 4×4 («coordinate omogenee»).

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, |\mathbf{M}| = rF \sin \theta$$

Momento: braccio di leva per forza per il seno dell'angolo.

$$\Sigma \mathbf{F} = 0, \Sigma \mathbf{M} = 0$$

Equilibrio statico.

$$\mathbf{x}_A = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{t}, \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

Cambio di sistema di riferimento: rotazione $\mathbf{R}$ e traslazione $\mathbf{t}$.

Esempio svolto. Il bicipite sorregge un peso

1. Avambraccio orizzontale: peso in mano 50 N a 35 cm dal gomito; peso dell'avambraccio 15 N a 15 cm; il bicipite si inserisce a 4 cm dal gomito, forza verticale.
2. Momenti attorno al gomito: $F_b \cdot 0,04 = 50 \cdot 0,35 + 15 \cdot 0,15 = 17,5 + 2,25 = 19,75 \text{ N}\cdot\text{m}$.
3. $F_b = 19,75 / 0,04 \approx \mathbf{494 \text{ N}}$: quasi dieci volte il peso sorretto.
4. Equilibrio verticale: la reazione nel gomito è $494 - 65 = 429 \text{ N}$ di compressione: l'articolazione porta molto più del peso sollevato.

3 Le tensioni nei materiali

La **tensione** (sforzo) è la forza per unità di area: $\sigma = F/A$, in pascal ($1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$). Se la forza è perpendicolare alla sezione si chiama **tensione normale** (σ), se è parallela alla sezione **tensione tangenziale** (τ). La **deformazione** $\varepsilon = \Delta L/L$ è l'allungamento relativo e non ha unità.

In un punto del materiale le tensioni dipendono dalla direzione del piano che si considera. Tutte insieme formano il **tensore delle tensioni**, una matrice 3×3 simmetrica. Si può sempre ruotare gli assi in modo che le tensioni tangenziali spariscano: restano tre **tensioni principali** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. La tensione tangenziale massima è metà della differenza fra la massima e la minima tensione principale.

Nel piano il **cerchio di Mohr** è la rappresentazione grafica: ogni piano passante per il punto è un punto sul cerchio con coordinate (σ, τ) . Il centro è nella media delle due tensioni normali, il raggio dipende dalla differenza e dalla tensione tangenziale. Serve a leggere in un colpo d'occhio il massimo e il minimo valore e l'orientamento dei piani principali.

Quando il materiale cede? Per i materiali duttili (metalli) si usano due criteri: **Tresca** (conta la massima tensione tangenziale) e **von Mises** (conta l'energia di distorsione). Per i materiali fragili (ceramiche, osso) si guarda la massima tensione principale di trazione. Si calcola una tensione equivalente e la si confronta con la resistenza: il rapporto è il **coefficiente di sicurezza**.

Concentrazione delle tensioni. Un foro, un angolo vivo, un cambio di sezione concentrano le tensioni: attorno a un foro circolare in una piastra la tensione massima è circa **tre volte** quella nominale. Le fratture di fatica partono quasi sempre da qui: per questo le placche ossee hanno fori a bordi raccordati e le viti si mettono con cura.

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensioni principali nel piano.

$$\tan 2\theta_p = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y), \tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

Orientamento dei piani principali e massima tensione tangenziale nel piano.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)}$$

Tensione equivalente di von Mises nel piano.

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}}$$

Concentrazione delle tensioni: $K_t \approx 3$ per un foro circolare in una piastra molto larga.

Esempio svolto. Un punto di una placca: $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 30 \text{ MPa}$

1. Centro del cerchio: $(80 + 20)/2 = 50 \text{ MPa}$. Raggio: $\sqrt{(30^2 + 30^2)} = \sqrt{1800} = 42,4 \text{ MPa}$.
2. Tensioni principali: $\sigma_1 = 50 + 42,4 = \mathbf{92,4 \text{ MPa}}$, $\sigma_2 = 50 - 42,4 = \mathbf{7,6 \text{ MPa}}$.
3. Orientamento: $\tan 2\theta = 60/60 = 1$, quindi $2\theta = 45^\circ$ e $\theta_p = \mathbf{22,5^\circ}$. Tensione tangenziale massima nel piano: $\mathbf{42,4 \text{ MPa}}$.
4. Von Mises: $\sqrt{(6400 - 1600 + 400 + 2700)} = \sqrt{7900} \approx \mathbf{88,9 \text{ MPa}}$. Con una lega Ti-6Al-4V (snervamento 880 MPa) il coefficiente è $880/88,9 \approx \mathbf{9,9}$: ampio, ma solo statico.

Esempio svolto. Un foro per una vite

1. Piastra con tensione nominale di 100 MPa e un foro circolare, $K_t \approx 3$.
2. $\sigma_{\max} = 3 \times 100 = \mathbf{300 \text{ MPa}}$ sul bordo del foro.
3. Il materiale lavora a un valore triplo di quello che si crederebbe leggendo la forza e la sezione: la fatica parte da lì.

4 La prova di trazione e le proprietà dei materiali

Per conoscere un materiale lo si tira. Un provino a forma di «osso di cane» si allunga a velocità costante mentre si misurano la forza e l'allungamento. Dividendo per l'area iniziale A_0 e la lunghezza iniziale L_0 si ottiene la curva **sforzo-deformazione**.

Nel primo tratto la curva è una retta: la pendenza è il **modulo di Young E** (legge di Hooke, $\sigma = E\varepsilon$). Il materiale è elastico: se si toglie il carico torna com'era. Oltre lo **snervamento** (σ_s , spesso preso a una deformazione residua dello 0,2 %) restano deformazioni permanenti. La curva continua a salire per l'**incrudimento** fino al massimo (**resistenza a trazione, σ_u**), poi si forma la **strizione**: la sezione si restringe in un punto, la forza cala e il provino si rompe.

Altre grandezze: l'**allungamento a rottura** misura la duttilità (i metalli superano il 10 %, l'osso si ferma al 2–3 %, le ceramiche sono vicine a zero); il **coefficiente di Poisson ν** (contrazione laterale, circa 0,3 per i metalli); la **tenacità**, cioè l'energia assorbita prima della rottura, area sotto la curva; la **durezza**.

Lo sforzo e la deformazione **ingegneristici** usano l'area iniziale; quelli **veri** usano l'area istantanea: $\sigma_{\text{vero}} = \sigma(1+\varepsilon)$ e $\varepsilon_{\text{vera}} = \ln(1+\varepsilon)$, con volume costante. La differenza conta solo oltre qualche percento.

Fatica. Un carico ripetuto molto sotto lo snervamento può portare a rottura dopo molti cicli. La curva **S-N** (curva di Wöhler) riporta la tensione contro il numero di cicli; per alcuni materiali (acciai, titanio) esiste un **limite di fatica** sotto il quale non c'è rottura. Le superfici graffiate, i fori e la corrosione lo abbassano molto.

$$\sigma = F/A_0, \varepsilon = \Delta L/L_0, \sigma = E\varepsilon$$

Sforzo, deformazione e legge di Hooke.

$$\sigma_v = \sigma(1 + \varepsilon), \varepsilon_v = \ln(1 + \varepsilon)$$

Grandezze vere dalle grandezze ingegneristiche.

$$U = \frac{1}{2} \sigma_s \varepsilon_s = \sigma_s^2 / (2E)$$

Energia elastica per unità di volume al limite elastico (resilienza).

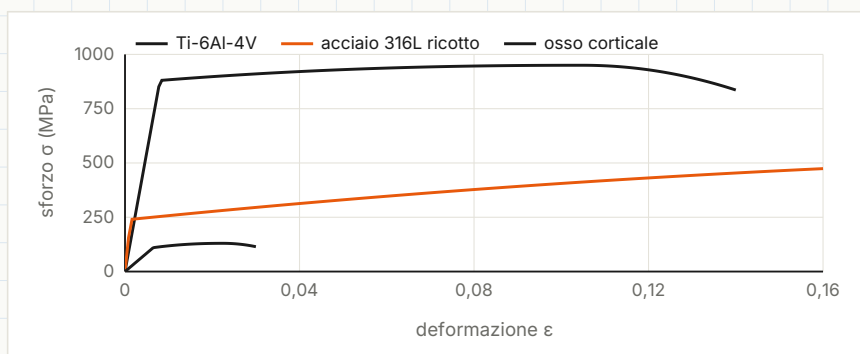


Figura. Curve sforzo-deformazione di tre materiali. Curve semplificate con valori tipici. Il titanio snerva molto più in alto dell'acciaio ricotto, l'acciaio si allunga di più; l'osso si rompe a circa il 3 % di deformazione.

Esempio svolto. Dai dati di una prova al modulo di Young

1. Provino di titanio, diametro 8 mm ($A_0 = 50,27 \text{ mm}^2$), lunghezza utile 40 mm. Con $F = 12 \text{ kN}$ l'allungamento è 0,087 mm.
2. $\sigma = 12\,000 / 50,27 = \mathbf{238,7 \text{ MPa}}$. $\epsilon = 0,087 / 40 = 0,002175$.
3. $E = \sigma/\epsilon = 238,7 / 0,002175 \approx \mathbf{110\,000 \text{ MPa} = 110 \text{ GPa}}$: il valore atteso del titanio.

Esempio svolto. Sforzo vero a 15 % di deformazione

1. Sforzo ingegneristico 600 MPa con $\epsilon = 0,15$.
2. $\sigma_v = 600 \times 1,15 = \mathbf{690 \text{ MPa}}$; $\epsilon_v = \ln 1,15 = \mathbf{0,140}$.
3. Nei metalli duttili la strizione fa cadere la curva ingegneristica, ma quella vera continua a salire.

5 L'osso come materiale vivo

L'osso è un composito gerarchico: collagene e minerale (apatite), organizzati in fibrille, lamelle e osteoni. Esistono due tipi: **corticale** (compatto, esterno, circa il 5–10 % di porosità) e **trabecolare** (spugnoso, interno, il 50–90 % di porosità). La rigidità dipende dalla **densità** in modo molto forte: l'ordine è $E \propto \rho^2$ nell'osso spugnoso e fino a ρ^3 nei modelli classici.

L'osso è **anisotropo**: è più rigido e resistente nel verso della lunghezza dell'osso che di traverso, ed è molto più resistente a compressione che a trazione e a taglio. Ha un comportamento **viscoelastico** (la risposta dipende dalla velocità del carico) e si danneggia con la fatica: nel corpo vivo le micro-cricche si riparano continuamente.

L'osso è anche **adattivo**. La legge di Wolff dice che l'architettura dell'osso si adatta alle forze che porta. In forma moderna, le cellule (osteociti) percepiscono la deformazione: sopra una certa soglia formano osso, sotto ne tolgono. Nel linguaggio dei modelli numerici esiste una «zona morta» attorno al valore normale. Ecco perché gli astronauti perdono massa ossea e perché una protesi che cambia i carichi cambia anche l'osso.

Cartilagine e legamenti. La cartilagine articolare è un materiale poroso e saturo di liquido con modulo di compressione molto basso (circa 0,5–1 MPa a regime lento) e rigidità di picco molto più alta sotto carico rapido. I legamenti e i tendini sono molto resistenti a trazione (decine di MPa) con una curva sforzo-deformazione che comincia con una zona «morbida» (le fibre di collagene si raddrizzano).

Tessuto	E (GPa)	Resistenza (MPa)	Allungamento a rottura
Osso corticale (lungo)	17–20	compressione 170–200; trazione 100–150	1–3 %
Osso corticale (trasversale)	6–12	compressione 130–150; trazione 50–60	< 1 %
Osso trabecolare	0,05–2	compressione 2–12	5–8 %
Cartilagine articolare	0,0005–0,001	molto variabile	—
Tendine	1–1,5	trazione 50–100	8–10 %

Idea chiave. Un materiale vivo non è un blocco passivo: reagisce al progetto. Chi progetta una protesi non confronta solo la resistenza di due materiali, ma anche come cambierà l'osso nei dieci anni successivi.

6 Cinematica del movimento umano

La **cinematica** descrive il movimento senza chiedersi le cause: posizioni, velocità e accelerazioni. Per descriverlo si schematizza il corpo come un insieme di **segmenti rigidi** (piede, gamba, coscia, bacino...) collegati da **articolazioni**. Ogni segmento ha un sistema di riferimento solidale, definito da punti anatomici (protuberanze ossee che si possono toccare); la posizione di questi sistemi rispetto a un riferimento fisso (il laboratorio) descrive tutto.

Gli angoli articolari si ottengono dall'orientamento relativo di due segmenti vicini. Per evitare ambiguità si adotta una convenzione condivisa (per esempio le raccomandazioni della Società Internazionale di Biomeccanica) e si descrivono tre rotazioni: flessione-estensione, abduzione-adduzione e rotazione interna-esterna. Le rotazioni nello spazio non commutano: l'ordine conta.

Come si misura. Con **marcatori riflettenti** sulla pelle e telecamere a infrarossi (100–200 Hz) si ricostruisce la posizione tridimensionale dei punti. In alternativa: sensori inerziali (accelerometri, giroscopi, magnetometri) indossabili, o telecamere senza marcatori con intelligenza artificiale. Il limite di tutti i metodi è l'**artefatto da tessuto molle**: la pelle si muove rispetto all'osso, e l'errore può arrivare ad alcuni millimetri o gradi.

Velocità e accelerazione si ottengono derivando la posizione nel tempo. Su dati campionati si usano le **differenze finite**. Ma la derivata **amplifica il rumore**: la derivata prima lo moltiplica per un fattore dell'ordine di $1/\Delta t$, la seconda per $1/\Delta t^2$. Per questo i dati si **filtrano** (di solito con un filtro passa-basso di 6–10 Hz, perché il cammino ha poche componenti sopra 10 Hz) prima di derivare.

Il ciclo del passo. Va dal contatto del tallone di un piede al successivo contatto dello stesso piede. Dura circa un secondo. La **fase di appoggio** è il 60 % del ciclo, la **fase di oscillazione** il 40 %; i due piedi sono entrambi a terra nel 20 % del ciclo (doppio appoggio). Il ginocchio si flette di circa 15–20° subito dopo il contatto per ammortizzare, si estende a metà appoggio e raggiunge 60° circa in oscillazione per far passare il piede.

$$v_i \approx (x_{i+1} - x_{i-1}) / (2\Delta t)$$

Velocità con la differenza centrale.

$$a_i \approx (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) / \Delta t^2$$

Accelerazione con la differenza seconda.

$$v = L_{\text{passo}} \cdot c, L_{\text{falcata}} = 2L_{\text{passo}}$$

Velocità del cammino da lunghezza del passo e cadenza (passi al secondo).

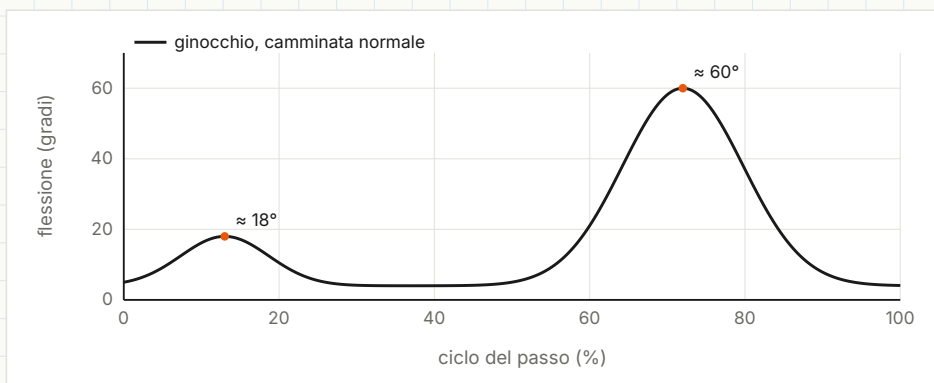


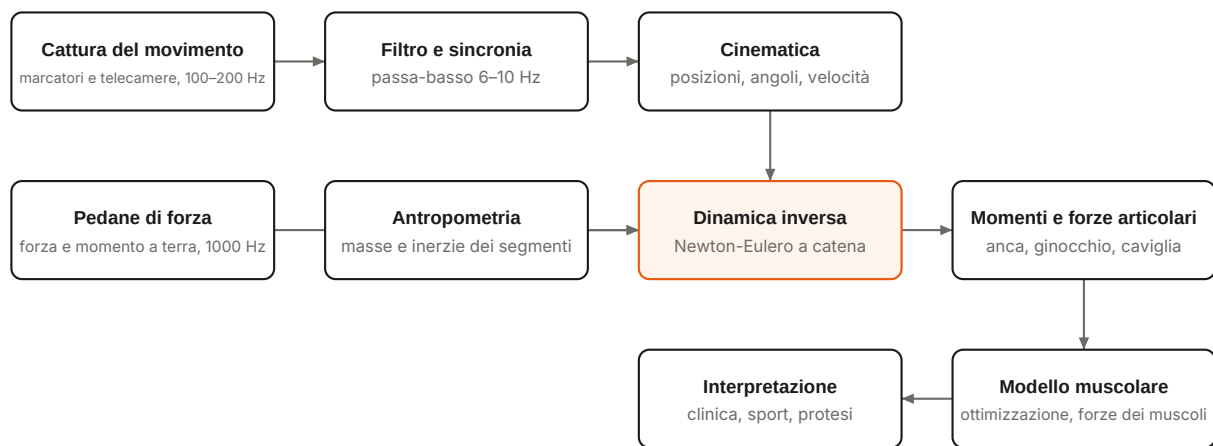
Figura. Angolo di flessione del ginocchio nel ciclo del passo. Curva schematica con valori tipici. Il primo picco ammortizza l'urto del tallone; il secondo permette al piede di non strisciare a terra nella fase di oscillazione.

Esempio svolto. Velocità e passo

1. Un adulto cammina a 1,4 m/s con cadenza 110 passi/min = 1,83 passi/s.
2. Lunghezza del passo: $1,4 / 1,83 \approx 0,76 \text{ m}$; falcata: $\approx 1,53 \text{ m}$.
3. Durata della falcata: $2 \text{ passi} / 1,83 = 1,09 \text{ s}$.

Esempio svolto. Il rumore e la derivata

1. Un marcatore è misurato a 100 Hz ($\Delta t = 0,01 \text{ s}$) con rumore di 0,5 mm (deviazione standard).
2. Velocità (differenza centrale): rumore $\approx 0,5 \cdot \sqrt{2} / (2 \cdot 0,01) \approx 35 \text{ mm/s}$.
3. Accelerazione (differenza seconda): rumore $\approx 0,5 \cdot \sqrt{6} / 0,01^2 \approx 12\,000 \text{ mm/s}^2 = 12 \text{ m/s}^2$, più dell'accelerazione di gravità. Senza filtro i dati sono inutilizzabili.

7 Schema a blocchi: l'analisi del cammino

Schema. Dalla misura al momento articolare. Il blocco arancione è il cuore del metodo: la dinamica inversa unisce movimento, forze a terra e massa dei segmenti per calcolare i momenti nelle articolazioni.

Cattura e pedane. Le due misure devono essere sincronizzate. Le pedane danno la forza di reazione a terra: la componente verticale ha nel cammino la caratteristica forma «a doppia gobba» con due picchi di circa 1,1–1,2 volte il peso, e una valle di circa 0,8.

Antropometria. Non si possono misurare direttamente massa, centro di massa e momento d'inerzia di ogni segmento: si stimano con tabelle in funzione del peso e dell'altezza (la coscia vale circa il 10 % del peso corporeo, la gamba il 4,6 %, il piede l'1,4 %).

Dinamica inversa. Si parte dai segmenti più distali (il piede, dove si conosce la forza a terra) e si risale lungo la catena: per ogni segmento si scrivono le equazioni di Newton-Eulero e si ricavano forza e momento nell'articolazione successiva. Il risultato è il **momento articolare netto**, che è quello che muscoli e legamenti devono produrre insieme.

Modello muscolare. Il momento netto non dice quali muscoli lavorano: con più muscoli che equazioni il problema è indeterminato. Si risolve con un criterio di ottimizzazione (per esempio minimizzare lo sforzo totale), con modelli di attivazione e con i segnali EMG come controllo.

Interpretazione. Il risultato serve per la diagnosi del cammino (paralisi cerebrale, ictus), per la riabilitazione, per la scelta di un ortesi o di una protesi, per le prestazioni sportive e per fornire i carichi di ingresso ai modelli agli elementi finiti.

8 La dinamica e le forze sull'anca

La **dinamica** lega le forze al movimento. Per un corpo rigido valgono le due equazioni di **Newton-Eulero**: la somma delle forze è massa per accelerazione del centro di massa; la somma dei momenti rispetto al centro di massa è la derivata del momento angolare, che nel piano diventa momento d'inerzia per accelerazione angolare.

La **dinamica inversa** parte dal movimento misurato e calcola le forze: è un calcolo diretto, ma sensibile agli errori (la derivata seconda!). La **dinamica diretta** parte dalle forze (o dalle attivazioni muscolari) e calcola il movimento: serve a simulare e a «provare» una nuova protesi o una nuova strategia di cammino, ma richiede un modello molto accurato.

Il modello più semplice per l'anca. Nell'appoggio su una gamba sola il corpo sopra l'anca pesa circa **5/6 del peso corporeo** (il resto è la gamba che appoggia). Il suo baricentro sta a circa 10 cm dal centro dell'articolazione, dal lato opposto a quello del muscolo abduttore, che si inserisce a circa 5 cm. Per tenere il bacino in equilibrio l'abduttore deve fare una forza doppia del peso che sorregge e la forza sull'anca è la loro somma.

Il modello statico è un ordine di grandezza: i muscoli sono inclinati rispetto alla verticale, intervengono altri muscoli, e nel cammino ci sono accelerazioni; i valori misurati con protesi strumentate (2,4–2,6 volte il peso) confermano il risultato statico (circa 2,5). Il **bastone**, tenuto dal lato opposto all'anca operata, ha un braccio di leva molto grande rispetto all'anca: anche un piccolo carico sul bastone riduce in modo sensibile il momento da bilanciare e quindi la forza del muscolo, ed è per questo che si consiglia dopo un intervento.

$$\Sigma \mathbf{F} = m \mathbf{a}_{cm}, \Sigma \mathbf{M}_{cm} = I \alpha$$

Newton-Eulero nel piano.

$$F_m \cdot a = (5/6 \cdot P) \cdot b$$

Equilibrio dei momenti attorno all'anca in appoggio su una gamba: $a \approx 5$ cm, $b \approx 10$ cm.

$$F_{anca} \approx F_m + 5/6 \cdot P \approx 2,5 \cdot P$$

Modello statico con forze parallele.

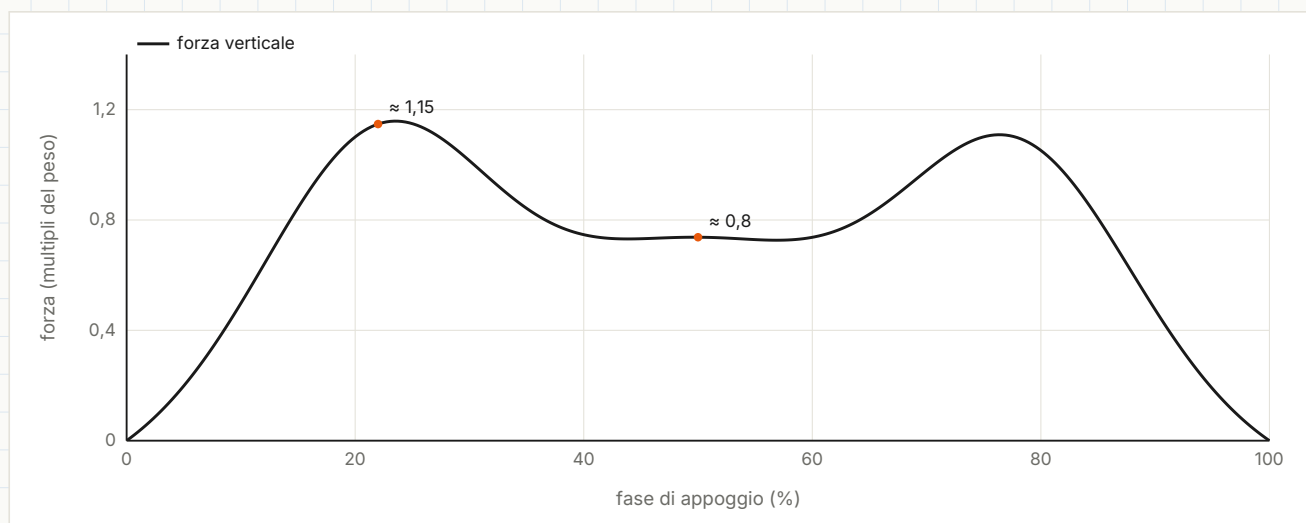


Figura. Forza verticale a terra durante la fase di appoggio. Curva schematica: due picchi (frenata e spinta) e una valle in cui il corpo è «più leggero» sul piede, perché il baricentro è al punto più alto del passo.

Esempio svolto. Forza sull'anca di una persona di 75 kg

1. Peso $P = 75 \times 9,81 = 736 \text{ N}$. Peso del corpo sopra l'anca: $5/6 P = \mathbf{613 \text{ N}}$.
2. $F_m \cdot 5 \text{ cm} = 613 \cdot 10 \text{ cm} \rightarrow F_m = \mathbf{1226 \text{ N}}$.
3. $F_{\text{anca}} = 1226 + 613 = \mathbf{1839 \text{ N}} \approx 2,5 P$.

9 Stress shielding e protesi

Lo **stress shielding** («schermatura delle tensioni») è la perdita di osso intorno a un impianto più rigido. Se osso e stelo sono due elementi in parallelo che si deformano insieme, **ciascuno porta una quota del carico in proporzione alla propria rigidità** (modulo per area). Uno stelo molto più rigido porta quasi tutto, l'osso viene scaricato e la legge di Wolff dice che si riassorbe: negli studi con misure di densità si osservano perdite di osso, soprattutto nella parte alta del femore, che possono arrivare a qualche decina per cento nei primi anni.

Il modello a due barre in parallelo è semplice ma istruttivo: la quota portata dall'osso è $E_o A_o / (E_o A_o + E_s A_s)$. Per ridurre lo stress shielding si agisce su tutti e quattro i termini: **materiale meno rigido** (titanio invece di Co-Cr; PEEK o composito), **sezione più piccola o cava**, **stelo più corto** (il carico passa all'osso più in alto) e **strutture porose** che riducono la rigidità efficace.

Il rimedio opposto, però, ha un limite: uno stelo troppo flessibile subisce tensioni più alte, e un materiale poco rigido ha meno resistenza alla fatica. Il progetto è un compromesso: oltre alle tensioni nell'osso (per evitare riassorbimento) bisogna controllare le tensioni nello stelo (per evitare fratture) e le tensioni all'interfaccia osso-impianto (per evitare lo scollamento).

Fatica dello stelo. Lo stelo lavora soprattutto a **flessione**: la forza sull'anca è spostata di circa 4 cm rispetto all'asse dello stelo e produce un momento. La tensione massima nella fibra più lontana è $\sigma = M \cdot c / I$, con I momento d'inerzia della sezione (per un cilindro pieno $\pi d^4 / 64$). Poiché c/I cresce come $1/d^3$, rimpicciolire il diametro del 10 % alza la tensione di circa il 37 %.

$$\text{quota}_{\text{osso}} = E_o A_o / (E_o A_o + E_s A_s)$$

Due barre in parallelo con la stessa deformazione.

$$\sigma = M c / I, I = \pi d^4 / 64$$

Flessione di una barra cilindrica: M momento, $c = d/2$, I momento d'inerzia.

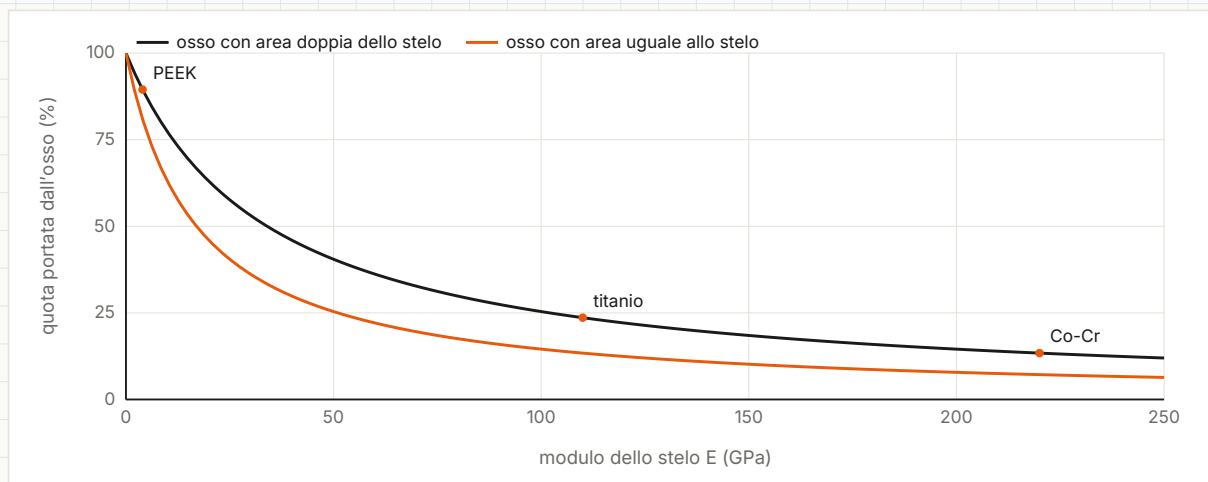


Figura. Quota di carico portata dall'osso al variare della rigidità dello stelo. Con $E_{\text{osso}} = 17 \text{ GPa}$. Più è rigido lo stelo, più l'osso viene scaricato; una sezione più piccola dello stelo aiuta quanto un materiale più morbido.

Esempio svolto. Quota di carico sull'osso con tre materiali

1. Osso: $E = 17 \text{ GPa}$, area 3 cm^2 . Stelo: area $1,5 \text{ cm}^2$. Prodotto osso: $17 \times 3 = 51$.
2. Titanio (110 GPa): $110 \times 1,5 = 165 \rightarrow$ quota osso $= 51/(51 + 165) = 24 \%$.
3. Co-Cr (220 GPa): $330 \rightarrow 51/381 = 13 \%$. PEEK (4 GPa): $6 \rightarrow 51/57 = 89 \%$.
4. Si capisce l'interesse per il PEEK, e la sua debolezza: con un quarto di rigidezza dell'osso lo stelo porta quasi niente e lavora sotto tensioni alte.

Esempio svolto. Tensione di flessione in uno stelo cilindrico

1. Forza sull'anca 1875 N (2,5 P per $P = 750 \text{ N}$), distanza dall'asse 40 mm: $M = 75\,000 \text{ N}\cdot\text{mm}$. Diametro 14 mm.
2. $I = \pi \cdot 14^4 / 64 = 1886 \text{ mm}^4$; $c = 7 \text{ mm}$.
3. $\sigma = 75\,000 \times 7 / 1886 \approx 278 \text{ MPa}$.
4. Diametro ridotto a 12,6 mm (−10 %): σ aumenta di $(14/12,6)^3 = 1,37$, cioè a circa **381 MPa**. Il limite di fatica del Ti-6Al-4V è di circa 500 MPa o più: il margine si assottiglia.

10 Elementi finiti

Il metodo degli **elementi finiti** (FEM) divide un oggetto complesso in tanti elementi semplici (triangoli, tetraedri, mattoni) collegati nei punti chiamati **nodi**. Per ogni elemento si scrive una relazione fra forze e spostamenti dei nodi (la **matrice di rigidezza** dell'elemento); si **assemblano** tutte nel sistema globale e si risolve per gli spostamenti incogniti. Dagli spostamenti si ricavano deformazioni e tensioni.

L'equazione fondamentale è $[K]\{u\} = \{F\}$. Prima di risolvere si impongono i **vincoli** (nodi fissi): senza, il corpo potrebbe muoversi liberamente e il sistema non ha soluzione unica. Il caso più semplice è la **barra**: un elemento con rigidezza $k = EA/L$, come una molla.

Il flusso di lavoro in biomeccanica. (1) Geometria: dalla TC o dalla risonanza si ricostruisce la forma dell'osso. (2) Mesh: si divide in elementi (decine di migliaia o milioni). (3) Materiali: nell'osso il modulo cambia da punto a punto, in funzione della densità ricavata dalla TC (unità Hounsfield). (4) Carichi e vincoli: forze muscolari e articolari, di solito dalla dinamica inversa. (5) Soluzione e analisi dei risultati. (6)

Verifica e validazione.

Convergenza della mesh. Una mesh troppo grossolana dà risultati falsi; infittendo gli elementi il risultato tende a un valore limite. Si fa uno studio di convergenza finché il cambiamento è sotto il 2–5 %. Attenzione alle **singolarità**: in un angolo con carico concentrato la tensione teorica è infinita e cresce all'infittire della mesh, senza convergere: si guardano tensioni lontane dal punto, o si cambia il modello.

Verifica e validazione. La *verifica* controlla che si risolva bene l'equazione (confronto con soluzioni note); la *validazione* controlla che il modello rappresenti la realtà (confronto con prove su ossa, con misure di deformazione, con casi clinici). Un modello non validato è un disegno colorato, non un risultato. Per i modelli costruiti sul singolo paziente si confrontano le deformazioni previste con quelle misurate su ossa di cadavere: in condizioni controllate l'errore può scendere intorno al 10 %.

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

Equazione di equilibrio del modello: matrice di rigidezza, spostamenti nodali, forze.

$$k = EA / L$$

Rigidezza di una barra: come una molla.

$$E(\rho) = a \cdot \rho^b$$

Legge densità-modulo dell'osso (b fra 2 e 3), usata per assegnare i materiali dalla TC.

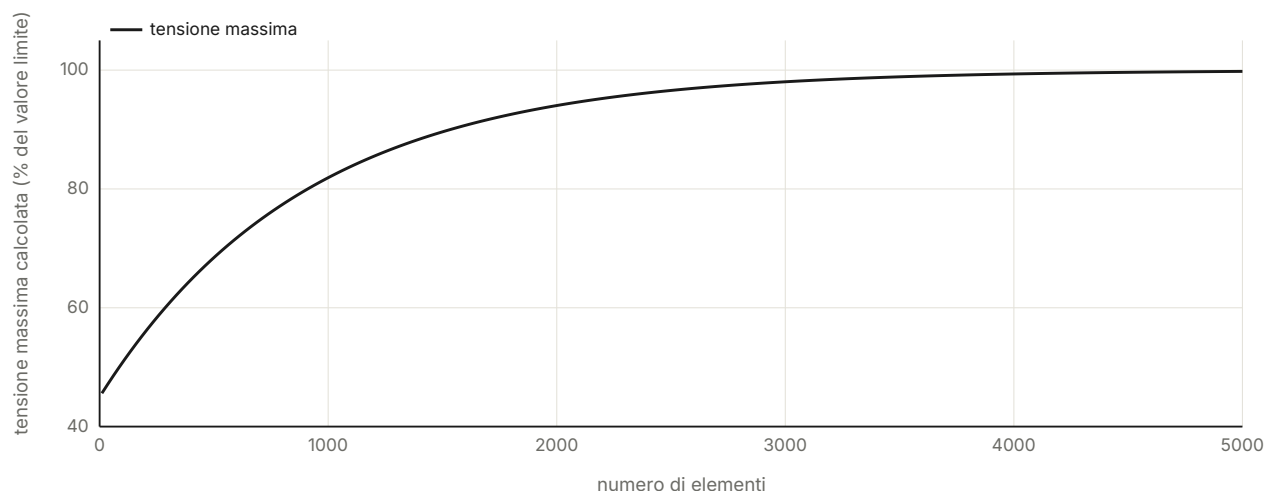


Figura. Convergenza di una mesh. Con pochi elementi la tensione è sottostimata; oltre un certo numero la curva si appiattisce e la mesh si può considerare adeguata. Se continuasse a crescere senza fermarsi sarebbe il segno di una singolarità.

Esempio svolto. Una barra di titanio con due elementi

1. Barra di 200 mm, area 100 mm², E = 110 000 MPa, fissa a sinistra, forza 1000 N all'estremità. Due elementi di 100 mm: $k = EA/L = 110\,000 \times 100 / 100 = \mathbf{110\,000\,N/mm}$.
2. Con il nodo 1 fisso, le equazioni per i nodi 2 e 3 sono: $2k \cdot u_2 - k \cdot u_3 = 0$; $-k \cdot u_2 + k \cdot u_3 = 1000$.
3. Soluzione: $u_2 = 1000/k = \mathbf{0,00909\,mm}$, $u_3 = 2 \cdot 1000/k = \mathbf{0,01818\,mm}$.
4. Controllo con la formula esatta: $\delta = FL/(EA) = 1000 \times 200 / (110\,000 \times 100) = 0,01818\,mm$. Coincide (per la barra uniforme il FEM è esatto).

11 Limiti dei modelli e errori tipici

Rumore e artefatti. Il rumore dei marcatori e il movimento della pelle sull'osso falsano posizioni e angoli; dopo la derivata seconda gli errori sulle accelerazioni diventano grandi. Rimedi: filtri, posizioni dei marcatori ripetibili, più marcatori e metodi di ottimizzazione globale.

Condizioni al contorno. Il risultato di un modello agli elementi finiti dipende dai carichi e dai vincoli: se si sbagliano, la precisione della mesh non serve. I vincoli troppo rigidi creano tensioni artificiali; i carichi muscolari sono incerti.

Proprietà dei materiali. Il modulo dell'osso varia molto da persona a persona e con l'età; usare un unico valore per tutti dà risultati che non rappresentano nessun paziente reale.

Confondere statico e dinamico. Il modello statico a due forze dà un ordine di grandezza; per decisioni di progetto si usano i carichi misurati o calcolati con la dinamica inversa.

Troppi gradi di libertà. I muscoli sono più delle equazioni: la scelta del criterio di ottimizzazione influenza i risultati. Il modello è utile per confrontare scenari (con e senza protesi, con e senza bastone), meno per prevedere un numero esatto.

Unità di misura. Un errore classico: mescolare N con kN o mm con m. Il controllo dimensionale di una formula è sempre il primo test.

Che cosa si vede	Possibile causa	Controllo
Accelerazioni enormi nei dati	rumore amplificato dalla derivata	filtrare prima, controllare la frequenza di taglio

Che cosa si vede	Possibile causa	Controllo
Tensione che cresce senza fermarsi infittendo la mesh	singolarità (angolo, carico puntiforme)	cambiare il punto di lettura o il modello
Spostamenti enormi, calcolo che non converge	vincoli mancanti	controllare che il corpo sia bloccato
Momento al ginocchio troppo alto	peso o baricentro del segmento sbagliato	controllare le tabelle antropometriche
Risultati diversi in laboratori diversi	posizione dei marcatori, definizione degli assi	usare una convenzione condivisa

12 Esercizi con soluzione

Esercizio 1. Un provino di acciaio ($A_0 = 50 \text{ mm}^2$, $L_0 = 50 \text{ mm}$) è caricato con 10 kN e si allunga di 0,05 mm. Calcola σ , ϵ ed E.

Soluzione. $\sigma = 10\,000/50 = 200 \text{ MPa}$. $\epsilon = 0,05/50 = 0,001$. $E = 200/0,001 = 200\,000 \text{ MPa} = 200 \text{ GPa}$.

Esercizio 2. In un punto $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 40 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$. Calcola le tensioni principali e la von Mises.

Soluzione. Centro 70, raggio $\sqrt{(30^2 + 40^2)} = 50$. $\sigma_1 = 120 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 20 \text{ MPa}$. Von Mises = $\sqrt{(10000 - 4000 + 1600 + 4800)} = \sqrt{12400} \approx 111 \text{ MPa}$.

Esercizio 3. Una piastra con foro circolare ha tensione nominale 150 MPa e $K_t = 3$. Un materiale con snervamento 400 MPa regge?

Soluzione. $\sigma_{\max} = 450 \text{ MPa} > 400$: snerva localmente sul bordo del foro. Serve una piastra più larga o più spessa, un foro raccordato, un materiale più resistente.

Esercizio 4. Una persona di 90 kg appoggia su una gamba: $a = 5 \text{ cm}$ (abduktore), $b = 10 \text{ cm}$ (peso 5/6 P). Calcola la forza sull'anca e la sua frazione del peso.

Soluzione. $P = 883 \text{ N}$; $5/6 P = 736 \text{ N}$. $F_m = 736 \times 10/5 = 1472 \text{ N}$. $F_{\text{anca}} = 1472 + 736 = 2208 \text{ N} \approx 2,5 P$.

Esercizio 5. Cammina a 1,2 m/s con 100 passi al minuto. Quanto è lungo il passo? E la falcata?

Soluzione. Cadenza $100/60 = 1,67 \text{ passi/s}$. Passo = $1,2/1,67 = 0,72 \text{ m}$; falcata = 1,44 m.

Esercizio 6. Con campionamento a 200 Hz ($\Delta t = 5 \text{ ms}$) e rumore di 0,3 mm sulla posizione, stima il rumore sull'accelerazione ottenuta con la differenza seconda.

Soluzione. $\sigma_{\sqrt{6}/\Delta t^2} = 0,3 \times 2,449 / 0,000025 = 29\,400 \text{ mm/s}^2 \approx 29 \text{ m/s}^2$.

Esercizio 7. Osso: $E = 17 \text{ GPa}$, area 4 cm^2 . Stelo in Co-Cr (220 GPa) con area 1 cm^2 . Che quota di carico porta l'osso?

Soluzione. $17 \times 4 = 68$; $220 \times 1 = 220$. Quota osso = $68/288 = 24 \%$.

Esercizio 8. Barra di 150 mm, $E = 70 \text{ GPa}$ (alluminio), area 80 mm^2 , tirata con 4 kN. Calcola l'allungamento.

Soluzione. $\delta = FL/(EA) = 4000 \times 150/(70\,000 \times 80) = 0,107 \text{ mm}$.

Esercizio 9. Perché si filtra il segnale prima di derivarlo e non dopo?

Soluzione. Derivare amplifica le alte frequenze, dove c'è soprattutto rumore. Se si filtra dopo, il rumore è già stato amplificato e i dati veri sono mescolati con esso; filtrando prima si riduce la parte inutile e si deriva il segnale pulito.

13 Glossario

Anisotropo — con proprietà diverse in direzioni diverse.

Antropometria — dimensioni e masse dei segmenti del corpo.

Cerchio di Mohr — rappresentazione grafica delle tensioni su tutti i piani passanti per un punto.

Cinematica — descrizione del movimento senza le forze.

Dinamica inversa — calcolo delle forze e dei momenti dal movimento misurato.

Elemento finito — piccola parte di un corpo con comportamento semplice, collegata ad altre nei nodi.

Incrudimento — aumento della resistenza dei metalli con la deformazione plastica.

Limite di fatica — tensione sotto la quale non c'è rottura per fatica.

Mesh — suddivisione di un corpo in elementi finiti.

Modulo di Young — pendenza del tratto elastico: rigidezza del materiale.

Momento — forza per braccio di leva: tendenza a ruotare.

Newton-Eulero — equazioni di moto di un corpo rigido.

Pedana di forza — strumento che misura la forza di reazione a terra.

Snervamento — inizio della deformazione permanente.

Strizione — restringimento locale del provino prima della rottura.

Stress shielding — riduzione del carico sull'osso causata da un impianto più rigido.

Tensione di von Mises — tensione equivalente basata sull'energia di distorsione.

Tessuto molle (artefatto) — errore causato dal movimento della pelle rispetto all'osso.

Validazione — verifica che il modello rappresenti la realtà.

14 Fonti

Le fonti sono elencate qui sotto con i collegamenti. I valori numerici sono ordini di grandezza da letteratura; per un progetto reale servono dati misurati sul caso specifico. Il testo non è un consiglio medico. Il testo è scritto da zero.

Fonti e letture

- G. Bergmann et al., Hip contact forces and gait patterns from routine activities — J Biomech 34 (2001) 859 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11410170/>
- F. Heller et al., Musculo-skeletal loading conditions at the hip during walking and stair climbing — J Biomech 34 (2001) 883 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11410172/>
- G. Bergmann et al., Standardized loads acting in hip implants — PLoS ONE 11 (2016) e0155612 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/27195789/>
- OrthoLoad, banca dati pubblica dei carichi misurati negli impianti — carichi in vivo — <https://orthoload.com>
- R. Huiskes et al., The relationship between stress shielding and bone resorption around total hip stems — Clin Orthop Relat Res 274 (1992) 124 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/1728998/>
- J. Y. Rho et al., Mechanical properties and the hierarchical structure of bone — Med Eng Phys 20 (1998) 92 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/9679227/>
- D. R. Carter, W. C. Hayes, The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure — J Bone Joint Surg Am 59 (1977) 954 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/561786/>
- G. Wu et al., ISB recommendation on definitions of joint coordinate system (ankle, hip, spine) — J Biomech 35 (2002) 543 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11934426/>
- A. Cappozzo et al., Position and orientation in space of bones during movement: experimental artefacts — Clin Biomech 11 (1996) 90 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11415604/>
- S. L. Delp et al., OpenSim: open-source software to create and analyze dynamic simulations of movement — IEEE Trans Biomed Eng 54 (2007) 1940 — <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/18018689/>
- D. A. Winter, Biomechanics and Motor Control of Human Movement, 4^a ed. — Wiley, 2009
- ASTM F136 e F138 — proprietà del Ti-6Al-4V ELI e dell'acciaio 316L per impianti

Materiale divulgativo e di studio, gratuito, scritto da Sandro Feudo per sandrofeudo.com. Non serve a fare diagnosi né a usare apparecchi su persone. Puoi stamparlo e condividerlo citando la fonte.